

Cours 3 : Les réseaux de neurones comme approximateurs

Limites des méthodes d'approximation linéaires

1 Introduction et Contexte

L'objectif de ce chapitre est de démontrer que les méthodes d'approximation linéaires souffrent du **fléau de la dimension** lorsqu'elles sont appliquées à certaines classes de fonctions régulières. Ce résultat motive l'utilisation de méthodes non-linéaires (réseaux de neurones) qui atteignent de meilleurs taux de convergence.

Remarque 1. *Un réseau de neurones avec N neurones peut être beaucoup plus performant pour approximer une fonction de d variables qu'un sous-espace de dimension N préfixé (comme les polynômes ou les ondelettes).*

2 Cadre Mathématique

2.1 La classe de fonctions \mathcal{F}_C

Définition 1 (Classe de régularité \mathcal{F}_C). *Soit $C > 0$. On définit la classe \mathcal{F}_C comme l'ensemble des fonctions $f \in L^2([0, 1]^d)$ dont la transformée de Fourier $F(\vec{\omega})$ vérifie :*

$$\mathcal{F}_C = \left\{ f \mid f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} F(\vec{\omega}) e^{2\pi i \vec{\omega} \cdot \vec{x}} d\vec{\omega} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} \|\vec{\omega}\|_1 |F(\vec{\omega})| d\vec{\omega} \leq C \right\} \quad (1)$$

où $\|\vec{\omega}\|_1 = \sum_{j=1}^d |\omega_j|$.

2.2 Écart de Kolmogorov

Définition 2 (Écart de Kolmogorov). *Pour une classe $K \subset L^2([0, 1]^d)$, l'écart de dimension N est :*

$$w_N(K) = \inf_{H_N, \dim(H_N) \leq N} \sup_{f \in K} \|f - \text{proj}_{H_N} f\|_{L^2} \quad (2)$$

3 Résultat Principal : Fléau de la Dimension

Théorème 1. *Il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$ et $d \geq 1$:*

$$w_N(\mathcal{F}_C) \geq \kappa \frac{C}{d} \frac{1}{N^{1/d}} \quad (3)$$

[Image of curse of dimensionality in function approximation]

4 Preuve du Théorème

4.1 Étape 1 : Fonctions de test

Soient $\{\vec{k}_j\}_{j=1}^{2N} \subset \mathbb{N}^d$, ordonnés par $\|\vec{k}_1\|_1 \leq \dots \leq \|\vec{k}_{2N}\|_1$. On définit :

$$h_j^*(\vec{x}) = \cos(2\pi \vec{k}_j \cdot \vec{x}), \quad j = 1, \dots, 2N$$

4.2 Étape 2 : Normalisation

Lemme 2. La fonction $f_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{C}{2\|\vec{k}\|_1} \cos(2\pi\vec{k} \cdot \vec{x})$ appartient à \mathcal{F}_C .

Démonstration. La transformée de Fourier de $\cos(2\pi\vec{k} \cdot \vec{x})$ est $\frac{1}{2}(\delta_{\vec{k}} + \delta_{-\vec{k}})$. Ainsi :

$$\int \|\vec{\omega}\|_1 |F_{f_{\vec{k}}}(\vec{\omega})| d\vec{\omega} = \frac{C}{4\|\vec{k}\|_1} (\|\vec{k}\|_1 + \|-\vec{k}\|_1) = \frac{C}{2} \leq C$$

□

4.3 Étape 3 : Borne sur l'erreur

Pour tout sous-espace H_N de dimension N , il existe une combinaison des $2N$ fonctions de test qui est orthogonale à H_N . L'erreur est alors minorée par :

$$w_N(\mathcal{F}_C) \geq \min_{j \in \{1, \dots, 2N\}} \frac{C}{2\sqrt{2}\|\vec{k}_j\|_1} = \frac{C}{2\sqrt{2}\|\vec{k}_{2N}\|_1} \quad (4)$$

4.4 Étape 4 : Combinatoire

Le nombre de vecteurs $\vec{k} \in \mathbb{N}^d$ tels que $\|\vec{k}\|_1 \leq m$ est $\binom{m+d}{d}$. On cherche m tel que :

$$\binom{m+d}{d} \geq 2N \quad (5)$$

En utilisant l'inégalité $\binom{m+d}{d} \geq \left(\frac{m}{d}\right)^d$, la condition est satisfaite si :

$$m \geq d(2N)^{1/d} \quad (6)$$

4.5 Étape 5 : Conclusion

En injectant (4) dans (2), on obtient :

$$w_N(\mathcal{F}_C) \geq \frac{C}{2\sqrt{2} \cdot d(2N)^{1/d}} \geq \kappa \frac{C}{d} \frac{1}{N^{1/d}} \quad (7)$$

Ceci démontre que pour les méthodes linéaires, l'erreur décroît de plus en plus lentement à mesure que d augmente.